MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
15.02.2014

CLASA a XII-a

PROBLEMA 1. Fie multimea

$$\mathrm{K}=\left\{A(a,b)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ b & 2b & b \\ -a & 0 & a \end{pmatrix};a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

Atunci $(\mathrm{K},+,\cdot)$ este corp.

PROBLEMA 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup și funcția $f:G\to G$, $f(x)=x^2$.

a) Să se demonstreze că f este endomorfism al grupului G dacă și numai dacă $(G,\cdot)$ este grup abelian.

b) Dacă grupul G este comutativ și are un număr impar de elemente, să se demonstreze că functia f este un automorfism al grupului G.

PROBLEMA 3. Fie sirul de termen general

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx}\left(tg^{n-1}x+tg^nx+tg^{n+1}x\right)dx, n\geq 1.$$

Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n^2]{nI_n}-1\right)$.

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ care verifică simultan condiţiile:

i) f este crescătoare;

ii) f admite o primitivă F cu proprietatea că $F(0)=0$ şi $F(x+y)\leq F(x)+F(y)$, $\forall x,y\in[0,\infty)$.

NOTA: Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza cu puncte de la 0 la 7.